

Study on damping performance of non-ideal particle-tuned inerter damper

Chenyang Han

Urban Construction Department, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

Abstract: Aiming at the shortcomings of the current particle dampers and the needs of civil engineering vibration damping, while considering the damping in the non-ideal inertial vessel, a new type of non-ideal particle tuned inerter damper (NPTID) is proposed. Firstly, the construction and technical realization of NPTID are introduced, the mechanical model of NPTID is proposed based on the principle of energy dissipation by particle collision, and the motion control equations of the single-degree-of-freedom structure with an additional NPTID are established; then three natural seismic waves and one artificial seismic wave are selected as the external excitations, and the damping performance of the NPTID is analyzed; finally, the influence of key parameters on the control effect of the NPTID is investigated by parametric analysis. The results show that NPTID has good control effect, and can realize the reduction ratio of more than 43% by utilizing a 0.1% particle mass ratio.

Keywords: Bon-ideal particle-tuned inerter damper, Inerter, Damping performance, Parametric analysis

非理想颗粒调谐惯容阻尼器减震性能研究

韩晨阳

北京工业大学城市建设学部, 中国 · 北京 100124

摘 要: 针对目前颗粒阻尼器的不足及土木工程减震的需求, 同时考虑非理想惯容器中的阻尼, 提出一种新型的非理想颗粒惯容阻尼器 (Non-ideal particle tuned inerter damper, NPTID)。首先, 介绍了 NPTID 的构造和技术实现方式, 基于颗粒碰撞耗能原理提出了 NPTID 的力学模型, 建立了附加 NPTID 单自由度结构的运动控制方程; 然后, 选用 3 条天然地震波和 1 条人工地震波作为外部激励, 分析了 NPTID 的减震性能; 最后, 通过参数化分析研究了关键参数对 NPTID 控制效果的影响。研究结果表明, NPTID 具有良好的响应控制效果, 能以 0.1% 的颗粒质量比实现 43% 以上的减震率。

关键词: 颗粒调谐惯容阻尼器; 惯容器; 减震性能; 参数化分析

1 引言

振动是机械和土木领域中广泛存在的问题。过度的振动会导致一系列的负面问题, 例如影响精密仪器精度^[1], 导致构件疲劳甚至结构破坏^[2]。因此, 增设振动控制装置来吸收, 耗散振动能量, 对于确保机械设备的安全运行^[3], 保证结构的服役性能^[4]至关重要。根据工作机理不同, 现有的振动控制技术大致可以分为四类: 被动控制、主动控制、半主动控制与混合控制^[5]。被动控制技术由于其无需外部能源以及实时的

数据反馈, 且构造简单、机理明确等诸多优点广受关注, 颗粒阻尼器^[6]便是其中之一。

颗粒阻尼器相关研究最早可以追溯到 1937 年 Paget^[7]发明的用于抑制涡轮叶片振动的冲击减振器, 在此之后, 相关学者围绕颗粒阻尼器开展了大量卓有成效的研究工作。Masri 等^[8,9]推导了谐波激励下附加单颗粒阻尼器的结构响振动响应解析表达式, 并通过与试验结果对比验证了其准确性; 周占学等提出了基于颗粒阻尼器的多鼓型石柱抗震保护策略, 并基于离散-有限元联合的方法, 对其减震效果进行了研究, 结果表明: 附加颗粒阻尼器的石柱具有良好的能量耗散效果, 减震效果明显; 鲁正等^[10,11]将颗粒调谐质量阻尼器 (Particle Tuned Mass Damper, PTMD) 引入高层

基金项目: 北京市朝阳区博士后科学基金项目, 位移放大大型自复位摩擦阻尼器的力学性能与减震机理研究 (2011ZZ-023, Q1004C01202302)。

建筑的振动控制领域，并进行了一系列的振动台试验和风洞试验，验证了颗粒调谐质量阻尼器相较于传统调谐质量阻尼器更具减震优势。

然而，传统颗粒阻尼器存在一些固有缺陷，例如附加质量大、极端情况下耗能有限等，因此一些学者开始利用惯容装置提高颗粒阻尼器的耗能能力，使其更适用于工程结构。其中，赵志鹏等^[12]使用惯容系统SPIS-I代替PTMD中的阻尼元件，提出一种颗粒惯容系统（PIS），通过与PTMD的比较，发现PIS能以更小的质量比实现相同的控制效果；鲁正等^[13]使用惯容系统SPIS-II代替PTMD中的阻尼元件，提出一种双调谐颗粒惯容系统，进一步发挥惯容系统的质量和阻尼放大效果，并实现轻质化减震控制；鲁正等^[14]通过惯容元件将颗粒腔体接地，提出一种增效颗粒惯容阻尼器（EPID），基于SDOF-EPID系统的运动方程验证了EPID的控制效果，随后鲁正等^[15]制造了EPID样机，并进行了振动台试验，试验结果表明，EPID能够有效控制结构震动响应，且惯容器能够大幅降低EPID颗粒腔体的行程。鲁正等^[16]考虑EPID中非理想惯容器中的阻尼，通过参数分析明确了惯容中阻尼的影响；郑飞云等^[17]将齿轮齿条式惯容器与颗粒阻尼器结合，提出一种新型的惯容颗粒阻尼器（ICD），采用离散元软件与多体动力学软件进行联合仿真，研究了设计参数对减振性能的影响。

本文将惯容与颗粒阻尼器有机结合，提出一种新型的非理想颗粒调谐惯容阻尼器（Non-ideal Particle Tuned Inerter Damper, NPTID）。首先介绍了NPTID的构造及工作原理，基于颗粒碰撞耗能原理提出了NPTID的力学模型；基于单自由度结构（Single-Degree-Of-Freedom, SDOF）建立了SDOF-NPTID系统的理论分析模型；分析了不同地震动激励下NPTID的减震效果；研究了NPTID的耗能效果和制动力，并分析研究了颗粒频率比、颗粒阻尼比、归一化颗粒运动间隙和惯容阻尼比等参数对减震效果的影响规律。

2 NPTID的构造和理论模型

2.1 NPTID的构造

NPTID的构造如图1所示，其主要由齿轮齿条组件、外腔体、固定轴、旋转腔体、颗粒、环形导轨组成。当受到外部激励时，齿条相对于外腔体做往复运动，通过齿轮齿条组件带动旋转腔体旋转。值得注意的是，旋转轴与外腔体刚性连接，以固定齿轮和旋转

腔体。在将直线运动转化为旋转的过程中，旋转腔体内的颗粒沿环形导轨旋转并与腔体壁碰撞，从而产生用于消能的碰撞力。

在这种设计下，基于“双重放大”效应的NPTID将具有更高的能量耗散能力。“双重放大”效应通过两个关键机制实现：（1）齿轮齿条组件将直线运动转换为高速旋转，这放大了颗粒的碰撞速度，从而产生更大的碰撞力；（2）颗粒碰撞产生的碰撞力，经过齿轮齿条组件的放大机制转化为更大的轴向力，实现“双重放大”。此外，旋转腔体运动过程中产生的惯性质量还具有负刚度效应，根据文献^[18]叙述，负刚度效应可以帮助阻尼器运动，从而增强消能能力。

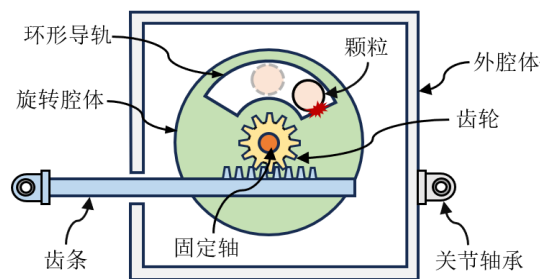


图1 NPTID 构造图

Fig. 1 Schematic drawing of NPTID

2.2 NPTID的力学模型

上一部分详细介绍了NPTID的构造、工作机制和潜在优势。本节将基于图1建立NPTID的力学模型，并做出以下假设：（1）假定非理想齿轮齿条式惯容器中的阻尼为速度线性相关性阻尼，并将阻尼单元与惯容单元并联；（2）为简化后续分析，只考虑单个颗粒的碰撞力。

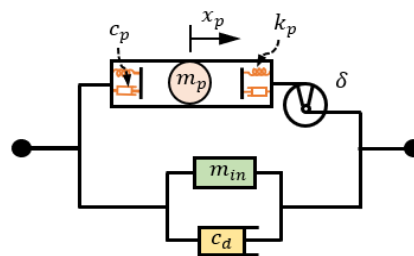


图2 NPTID 的力学模型

Fig. 2 Mechanical model of NPTID

图2展示了NPTID的力学模型，该模型分为颗粒碰撞系统和惯容系统两部分。具体而言，颗粒碰撞系统模拟颗粒的碰撞力，包括六个参数：颗粒的质量 m_p 、碰撞阻尼 c_p 、碰撞刚度 k_p 、旋转腔体半径 R 、齿轮半径

r 和颗粒运动间隙 d 。惯容系统模拟旋转腔体运动产生的惯性力以及惯容器本身的阻尼力。NPTID控制力的详细推导如下：

$$\begin{aligned} F_{NPTID} &= F_p + F_{in} + F_d \\ F_p &= \delta \left(k_p G(z) + c_p H(z, \dot{z}) \right) \\ F_{in} &= m_{in} \ddot{x}_N \\ F_d &= c_d \dot{x}_N \end{aligned}$$

式中， F_p 是非线性颗粒碰撞力， F_{in} 是惯性力， F_d 是阻尼力； $\delta = R/r$ 是放大系数， R 是旋转腔体的半径， r 是齿轮的半径； m_{in} 是惯容系数； c_d 是惯容系统的阻尼系数； $\ddot{x}_N$ 、 $\dot{x}_N$ 是NPTID两端的相对加速度、相对速度； k_p 和 c_p 分别为颗粒与腔体壁碰撞时的刚度系数和阻尼系数， $G(z)$ 和 $H(z, \dot{z})$ 分别为非线性弹性力函数和非线性阻尼力函数^[19]，可表示如下：

$$G(z) = \begin{cases} z - \frac{d}{2} & z \geq \frac{d}{2} \\ 0 & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ z + \frac{d}{2} & z \leq -\frac{d}{2} \end{cases}$$

$$H(z, \dot{z}) = \begin{cases} \dot{z} & z \geq \frac{d}{2} \\ 0 & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ \dot{z} & z \leq -\frac{d}{2} \end{cases}$$

式中， d 代表颗粒的自由运动间隙； z 和 $\dot{z}$ 分别是颗粒相对于环形导轨的相对位移和速度，可以通过以下公式计算：

$$\begin{aligned} z &= x_p - \delta x_N \\ \dot{z} &= \dot{x}_p - \delta \dot{x}_N \end{aligned}$$

式中， x_p 、 $\dot{x}_p$ 是颗粒的位移、速度； x_N 是NPTID两端的相对位移。

2 理论分析模型

图3展示了SDOF-NPTID系统的理论分析模型。在该理论模型中，单自由度结构包括质量块、弹簧和阻尼。至于NPTID，它连接在质量块和地面之间。根据图3，SDOF-NPTID系统的运动方程可写成如下形式：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_{in} + F_d - F_p &= -m\ddot{u}_g \\ m_p\ddot{x}_p + \frac{1}{\delta}F_p &= 0 \end{aligned}$$

式中， x 、 $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$ 是结构相对于地面的位移、速度、加速度； $\ddot{x}_p$ 是颗粒的加速度； $\ddot{u}_g$ 是地面加速度； m 、 k 、 c 是结构的质量、刚度系数和阻尼系数。

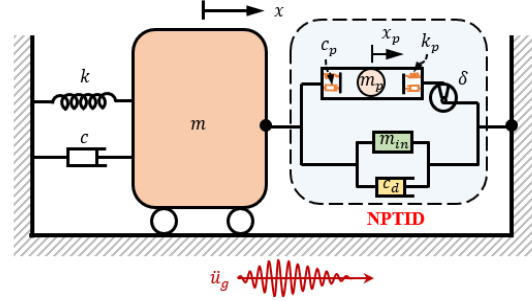


图3 SDOF-NPTID系统的理论分析模型
Fig. 3 Analytical model of SDOF-NPTID system

另外，为了方便研究，定义如下无量纲参数：

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c}{2m\omega} & \lambda &= \frac{\omega_p}{\omega} \\ \xi_p &= \frac{c_p}{2m_p\omega_p} & \xi_d &= \frac{c_d}{c} \\ \mu_p &= \frac{m_p}{m} & \mu_{in} &= \frac{m_{in}}{m} \\ \delta &= \frac{2\pi R}{l} & \varphi &= \frac{d}{R} \\ \psi &= \frac{R_{uc} - R_{NPTID}}{R_{uc}} \times 100\% \end{aligned}$$

式中， ξ 是结构的阻尼比； λ 是NPTID的颗粒频率比； ξ_p 是NPTID的颗粒阻尼比； ξ_d 是NPTID的惯容阻尼比； μ_p 是NPTID的颗粒质量比； μ_{in} 表示NPTID的惯性质量比； δ 是无量纲放大系数； ϕ 是无量纲颗粒运动间隙； ψ 是NPTID的减震率； R_{uc} 是无控结构响应； R_{NPTID} 是附加NPTID结构响应。

3 理论分析模型

3.1 SDOF-NPTID系统参数

为具有普适性，本节采用了参考文献^[14]中提出的SDOF模型来说明NPTID的控制效果。该模型的质量为100 kg，刚度为4800 N/m（基频为1.1 Hz），阻尼比为1%。NPTID的颗粒质量比 $\mu_p=0.1\%$ ，惯性质量比 $\mu_{in}=0.1\%$ ，放大系数 $\delta=5$ ，惯容阻尼比 $\xi_d=0.05$ ，旋转腔体半径 $R=0.1$ m，其余设计参数根据基于遗传优化算法的多目标优化设计方法^[14,20]得到（表1）。

表1 非理想颗粒调谐惯容阻尼器的参数

参数	设计参数				优化参数			
数值	0.1%	0.1%	0.05	5	0.1 m	1.21	0.11	0.42

3.2 NPTID的减震性能

选取Loma Prieta、Taft和Chi-Chi三条天然地震波和一条人工地震波（PGA=0.1 g），通过使用Runge-Kutta方法计算得到附加NPTID结构、无控结构在不同地震激励下响应的均方根值与峰值，并使用公式（7i）计算了相应的减震率。以Loma Prieta波为例，无控结构的位移均方根值和峰值分别为 14.9×10^{-3} m 和 43.8×10^{-3} m，而附加NPTID后，这两个值分别减少至 7.9×10^{-3} m 和 32.5×10^{-3} m，相应减震率分别达到46.9 %和25.8 %。至于加速度的均方根值和峰值，在无控结构中分别为 74.4×10^{-3} g 和 256.6×10^{-3} g。经过NPTID控制后，这两个值分别减少至 39.5×10^{-3} g 和 204.0×10^{-3} g，对应的减震率分别为 47.0 %和20.5 %。从结果可以看出，NPTID在地震波激励下的减震性能良好。

表 2 SDOF-NPTID 系统在不同地面运动下的均方根响应

地震波	结构	均方根			
		数值		衰减率	
		位移 (m)	加速度 (g)	位移 (%)	加速度 (%)
Loma Prieta	无控	14.9	74.4	—	—
	SDOF-NPTID	7.9	39.5	46.9	47.0
Taft	无控	18.3	91.1	—	—
	SDOF-NPTID	10.1	51.2	44.6	43.7
Chi-Chi	无控	7.3	36.4	—	—
	SDOF-NPTID	3.2	17.3	56.2	52.3
Artificial	无控	12.9	66.1	—	—
	SDOF-NPTID	6.2	35.1	51.7	46.9

表 3 SDOF-NPTID 系统在不同地面运动下的峰值响应

地震波	结构	峰值			
		数值		衰减率	
		位移 (m)	加速度 (g)	位移 (%)	加速度 (%)
Loma Prieta	无控	43.8	256.6	—	—
	SDOF-NPTID	32.5	204.0	25.8	20.5
Taft	无控	58.2	352.0	—	—
	SDOF-NPTID	37.0	273.6	36.4	22.3
Chi-Chi	无控	25.1	208.8	—	—
	SDOF-NPTID	16.1	131.8	36.0	36.9
Artificial	无控	42.8	248.0	—	—
	SDOF-NPTID	23.9	150.1	44.1	39.5

接下来，以Loma Prieta波为例进一步探究NPTID的减震性能，图4展示了Loma Prieta波作用下附加NPTID的结构的位移响应和加速度时程曲线，同时，还展示了无控结构的地震响应以作比较。从图中可以看出，在时间历程初期，结构地震响应衰减较小，这是因为此时NPTID中颗粒与腔体尚未充分碰撞，减震性能未充分发挥。经较短的启动时间后，颗粒与腔体充分碰撞，NPTID的减震性能得以有效发挥。此外，值得注意的是，NPTID的颗粒质量比（ μ_p ）仅为0.1 %，这比传统颗粒调谐质量阻尼器^[11]常用的质量比（通常为2 %至10 %）低一个数量级，这种“轻质化”效果可归因于齿轮齿条组件的“双重放大”效应显著提高了单位质量的耗能能力。

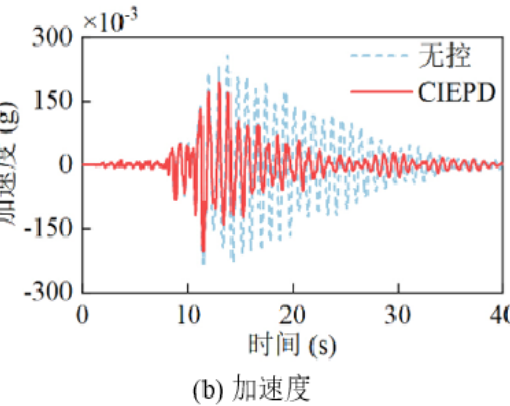
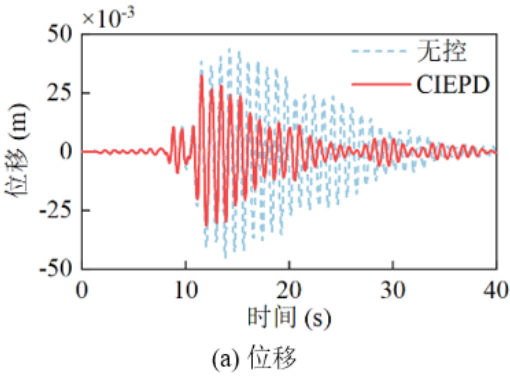


图 4 Loma Prieta 波激励下 SDOF-NPTID 系统的时程响应
Fig. 4 Response time histories of SDOF-NPTID system subjected to Loma Prieta wave

4 减震机理研究

4.1 NPTID耗能效果和制动力

在单自由度结构中，地震动输入的能量通过结构的固有阻尼和辅助耗散装置来耗散^[21]。可以根据以下公式计算结构固有阻尼、辅助耗散装置（即NPTID）的耗散能量以及总输入能量：

$$E_{in} = \int_0^T \dot{x} c \dot{x} dt = \int_0^T 2m\xi\omega\dot{x}^2 dt$$

$$E_p = \int_0^T \dot{x}_p c_p \dot{x}_p dt$$

$$E_d = \int_0^T \dot{x} c_d \dot{x} dt$$

$$E_{total} = E_{in} + E_p + E_d$$

式中, T 是地震波的持续时间; E_{in} 是结构的固有阻尼耗能; E_p 是NPTID中的颗粒耗能; E_d 是NPTID中非理想惯容系统的阻尼耗能; E_{total} 是附加NPTID结构的总耗能。

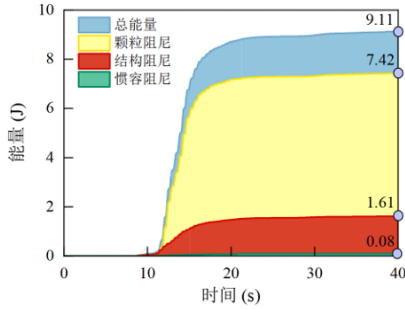


图5 Loma Prieta波激励下SDOF-NPTID系统的能量时程响应
Fig. 5 Energy time history of SDOF-NPTID system subjected to Loma Prieta wave

图5给出了在Loma Prieta波激励下SDOF-NPTID系统的能量耗散时程结果。如图所示, 结构本身消耗了1.61 J, 而NPTID消耗了7.42 J的能量, 约占总能量耗散的81.4%, 这凸显了NPTID优越的能量耗散能力。

除了SDOF-NPTID系统的能量时程响应外, 还进一步研究了NPTID的控制力。图5给出了Loma Prieta波激励下非线性颗粒碰撞力 F_p 和惯性力 F_{in} 的时程曲线。如图3-7 (a)所示, 当力的方向(正负号)发生变化时, 控制力在一段时间内会变为零值, 这是因为只有当颗粒在腔体运动间隙内时不发生碰撞, NPTID不会产生控制力。如图3-7 (b)所示, NPTID的惯性力相比于颗粒碰撞力小很多, 这证明NPTID主要通过非线性颗粒碰撞力来实现减震效果。

4.2 参数化分析

为探究优化参数对NPTID控制性能的影响, 图7 (a) - 7 (c) 分别展示了颗粒频率比 λ 、颗粒阻尼比 ξ_p 、归一化颗粒运动间隙 ϕ 对NPTID位移和加速度响应的均方根减震率的影响。为避免重复, 图中只展示了在人工地震波激励下的结果。

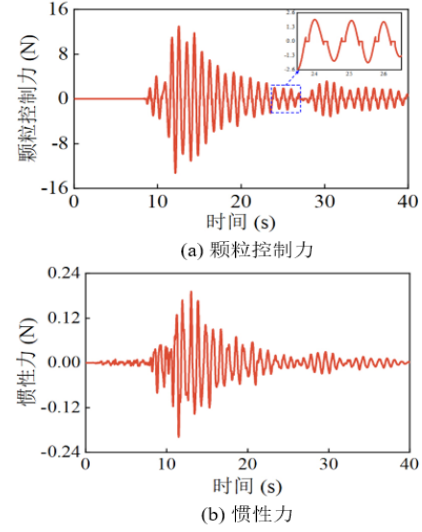


图6 Loma Prieta波激励下SDOF-NPTID系统的控制力时程响应

Fig. 6 Control force time histories of SDOF-NPTID system subjected to Loma Prieta wave

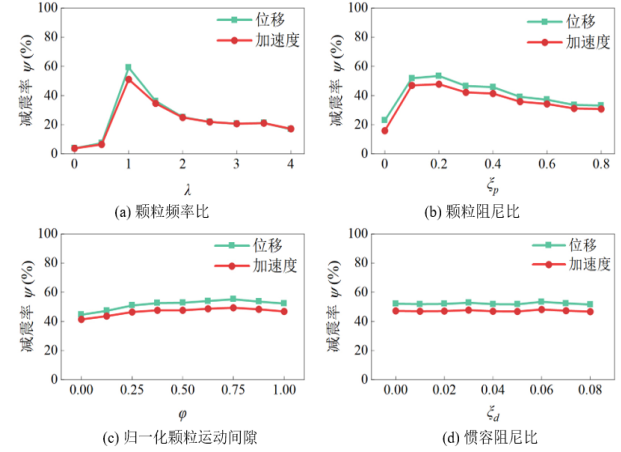


图7 不同参数对NPTID控制效果的影响

Fig. 7 Influence of different design parameters on the control effectiveness of NPTID

如图7 (a)所示, 颗粒频率比 $\lambda=0$ 代表颗粒腔体内壁不存在, 只有惯容系统起减震作用, 随着颗粒频率比 λ 的增加, 结构的减震率先增大后减小并趋于稳定, 这是因为过大的颗粒频率比(即颗粒碰撞刚度)会使得颗粒有害碰撞次数增多, 进而降低结构减震率。如图7 (b)所示, 颗粒阻尼比 ξ_p 的最佳范围大概在0.1-0.2之间, 而随着颗粒阻尼比 ξ_p 的增大, 结构的减震率变小, 这是因为过大的颗粒阻尼比使得颗粒在碰撞过程中消耗更多的能量, 导致颗粒碰撞后的相对速度过小, 后续不再发生碰撞。如图7 (c)所示, 随着归一化颗粒运动间隙 ϕ 的增加, 结构的减震率先增大后趋于稳定。需要注意的是, 旋转腔体半径的设计

值避免了颗粒运动间隙过大而不碰撞的情况。综上所述,可以看出经过多目标优化的最优参数都在合理范围之内,这进一步验证了NPTID参数的合理性。

图7(d)展示了惯容阻尼比对NPTID位移和加速度响应的均方根减震率的影响,可以看出惯容阻尼比对NPTID的减震率影响很小,主要是因为NPTID通过齿轮齿条式惯容器增强了颗粒阻尼的耗能效果,而惯容阻尼在结构的时程响应中耗能很小(见图5),因此惯容阻尼比的增加并不会影响NPTID的减震效果。

5 结论

本文提出了一种新型的非理想颗粒调谐惯容阻尼器(NPTID),详细介绍了它的构造和工作原理,建立了SDOF-NPTID系统的理论分析模型,分析了NPTID的减震性能,并通过参数分析研究了关键参数对NPTID控制效果的影响。根据以上分析,得出的结论如下:

(1) 在多条地震波激励下,NPTID以0.1%的颗粒质量比显著降低结构的震动响应,结构的位移和加速度均方根响应减震率均在43%以上。

(2) NPTID中的惯容元件能够显著放大颗粒控制力,提高颗粒阻尼耗能的效率,进而提高了NPTID的控制效果。

(3) 通过参数化分析研究了优化参数对NPTID控制效果的影响,验证了NPTID优化设计参数的合理性;另外,惯容阻尼比 c_d 对NPTID的控制效果影响很小,这降低了实际设计中对惯容器的要求,更易于加工制造。

参考文献

[1] Hong KS, Pham PT. Control of Axially Moving Systems: A Review[J]. International Journal of Control, 2019, 17(12): 2983–3008.

[2] Naeim F, Lew M, Carpenter LD, et al. Performance of tall buildings in Santiago, Chile during the 27 February 2010 offshore Maule, Chile earthquake[J]. The Structure Design of Tall and Special Buildings, 2011, 20(1): 1–16.

[3] Liu J, Deng T, Chang X, et al. Research on longitudinal vibration suppression of underwater vehicle shafting based on particle damping[J]. Scientific Reports, 2023, 13(1): 3047.

[4] Lu Z, Chen X, Zhou Y. An equivalent method for optimization of particle tuned mass damper based on experimental parametric

study[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 419: 571–584.

[5] Zuo H, Bi K, Hao H. A state-of-the-art review on the vibration mitigation of wind turbines[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2020, 121: 109710.

[6] Lu Z, Wang Z, Masri S F, et al. Particle impact dampers: Past, present, and future[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25(1): e2058.

[7] Paget A. Vibration in steam turbine buckets and damping by impacts[J]. Engineering, 1937, 143: 305–307.

[8] Masri S, Caughey T. On the stability of the impact damper[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(3):586–592.

[9] Masri S. Analytical and experimental studies of multiple - unit impact dampers[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1969, 45(5): 1111–1117.

[10] Lu Z, Wang D, Zhou Y. Experimental parametric study on wind - induced vibration control of particle tuned mass damper on a benchmark high - rise building[J]. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2017, 26: e1359.

[11] Lu Z, Chen X, Zhang D, et al. Experimental and analytical study on the performance of particle tuned mass dampers under seismic excitation[J]. Earthquake Engineering Structural Dynamics, 2017, 46: 697–714.

[12] Zhao Z, Zhang R, Lu Z. A particle inerter system for structural seismic response mitigation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(14): 7669–7688.

[13] 鲁正,周超杰,陈芸菲.双调谐颗粒惯容系统的减震控制研究[J].地震工程与工程振动,2022,42(06):35–43.

[14] Lu Z, Zhou C, Rong K, et al. Vibration reduction mechanism of a novel enhanced particle inerter device[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2023, 23(1): 2350009.

[15] Zhang J, Gao S, Lu Z, et al. Seismic control performance of multi-story structures with an based particle inerter device (EPID)[J]. Engineering Structures, 2021, 306: 117849.

[16] 鲁正,周超杰,谢丽宇,等.非理想颗粒惯容系统的减震性能研究[J].土木工程学报,2022,55(S1):168–174.

[17] 王宪杰,郑飞云,江鑫禹,等.新型颗粒阻尼惯容减振器设计及其减振性能分析[J].噪声与振动控制,2023,43(5):286–291.

[18] Ma R, Bi K, Hao H. Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review[J]. Engineering Structures, 2021, 243: 112655.

[19] Masri SF, Ibrahim AM. Response of the impact damper to

-
- stationary random excitation [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1973, 53:200–211.
- [20] Lu Z, Liu X, Ma N, et al. Multi-objective optimization and seismic performance verification of multiple tuned impact dampers for nonlinear benchmark building [J]. Structures. 2022, 41: 1672–1686.
- [21] Wang M, Sun F, Yang J, et al. Seismic protection of SDOF systems with a-negative stiffness amplifying damper [J]. Engineering Structures, 2019, 190: 128–141.