

Lagrange expansion formula and its application in combinatorial mathematics

Na Li

The School of Mathematics and Statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466001, Henan, China

Abstract: There is a uniqueness theorem for an implicit function. When a function satisfies certain conditions, the equation can determine a unique implicit function. However, we cannot determine the display expression of the implicit function according to this theorem. The Lagrange expansion formula just compensates for this disadvantage, which explicitly gives the display expression of the implicit function. This paper will give a simpler proof of the Lagrange expansion formula and provide examples to illustrate its application in combinatorial mathematics.

Keywords: Implicit function theorem; Lagrange expansion formula; Abel formula

Lagrange展开公式及其在组合数学中的应用

李纳

周口师范学院 数学与统计学院, 中国·河南周口 466001

摘要: 隐函数存在唯一性定理表示, 当一个函数 $F(x, y)$ 满足某些条件时, 方程 $F(x, y) = 0$ 可以确定唯一的隐函数。然而, 我们并不能根据此定理确定隐函数的显示表达式。Lagrange 展开公式恰恰弥补了这一缺点, 它明确给出了隐函数的显示表达式。本文将给出 Lagrange 展开公式的较简单的证明, 并以例子说明其在组合数学中的应用。

关键词: 隐函数定理; Lagrange 展开公式; Abel 公式

1 引言

分析学中有一个非常著名的定理——隐函数存在唯一性定理^[1]。在数学中, 隐函数定理是一个描述以隐函数表示的某些变量之间是否存在显式关系的定理。隐函数定理说明, 对于一个由关系 $F(x, y) = 0$ 表示的隐函数。如果它在某一点附近的微分满足某些条件, 则在这点附近, y 可以表示成关于 x 的函数: $y = f(x)$ 。这样就把隐函数关系变成了常见的函数关系。在高等数学和数学分析中运用很广, 还成为了常微分方程、泛函分析等课程的理论基础。在经济学、优化问题、最值问题中也应用广泛。但是, 隐函数定理仅仅保证存在这样

的函数关系, 并不是所有的关系式都能获得显式表达式。在本文中我们给出的Lagrange展开公式恰好弥补了这一缺陷。接下来我们将利用留数定理的相关结论来证明此公式, 并给出此公式在组合数学恒等式中的应用^[3]。

2 Lagrange 展开公式的证明

引理1 (柯西积分公式) (参考 [2, 定理3.11]) 设区域 D 的边界是周线 (或复周线) C , 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\bar{D} = D + C$ 上连续, 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D).$$

引理2 (参考 [2, 定理3.13]) 设区域 D 的边界是周线 (或复周线) C , 函数 $f(z)$ 存在各阶导数, 在 $\bar{D} = D + C$ 上连续, 则有

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in D, n = 1, 2, \dots).$$

定理2 (Lagrange 展开公式) 假设 $\phi(u)$ 是一个解析函数, 且在 $u = 0$ 处, 满足 $\phi(0) \neq 0$ 。则方程 $x = u / \phi(u)$ 确定了唯一的隐函数 $u = u(x)$, 使得对每

作者简介: 李纳 (1978—), 大连理工大学理学博士。周口师范学院, 副教授, 研究方向: 组合数学。

基金项目(Foundation): 河南省教师教育课程改革研究项目“强师计划背景下师范生实践教学能力提升研究”(项目编号: 2024JSJYYB-053); 周口师范学院教育教学改革研究重点项目“中学数学教育与大学数学教育深度衔接实践探索”(项目编号: J2022003)。

一个解析函数 $F(u)$ ，存在下面两个无穷级数展开式

$$F(u) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ F'(u) \phi^n(u) \right\} \Big|_{u=0}; \quad (1)$$

$$\frac{F(u)}{1-u\phi'(u)/\phi(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{du^n} \left\{ F(u) \phi^n(u) \right\} \Big|_{u=0}. \quad (2)$$

证明 因为 $\phi(u)$ 是解析函数，且 $x(u) = u / \phi(u)$ ，所以有 $x(0) = 0, u(0) = 0$ 。则 $x(u)$ 在 $u = 0$ 处为解析函数。

由于

$$x'(u) \Big|_{u=0} = \frac{\phi(u) - u\phi'(u)}{\phi^2(u)} \Big|_{u=0} = \frac{1}{\phi(0)} \neq 0,$$

则 $x(u)$ 的反函数 $u(x)$ 在 $x = 0$ 处无穷次可导，即可展开成Maclaurin级数。

任给一个解析函数 $F(u(x))$ ，满足 $u(0) = 0$ ，其Maclaurin级数展开式为

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0}. \quad (3)$$

接下来我们计算上式中的 $\frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0}$ 。根据引理2，有

$$\frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|x|=\varepsilon} \frac{F(u(x))}{x^{n+1}} dx.$$

令 $x = u / \phi(u)$ ，则上式变为

$$\frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon(u)} \frac{F(u)}{(u/\phi(u))^{n+1}} \frac{\phi(u) - u\phi'(u)}{\phi^2(u)} du \quad (4)$$

其中 $C_\varepsilon(u)$ 为 $|x| = \varepsilon$ 在变换 $x = u / \phi(u)$ 下像，是一条绕原点的封闭曲线。

回顾如下事实，令 $g(u) = F(u) \frac{\phi^n(u)}{u^n}$ ，则

$$g'(u) = F'(u) \frac{\phi^n(u)}{u^n} - nF(u) \frac{\phi^{n-1}(u) - u\phi^{n-1}(u)\phi'(u)}{u^{n+1}}.$$

将上式与(4)式中的被积函数比较，可得

$$\frac{F(u)}{(u/\phi(u))^{n+1}} \frac{\phi(u) - u\phi'(u)}{\phi^2(u)} = F'(u) \frac{\phi^n(u)}{u^n} - \frac{g'(u)}{n}.$$

因此，(4)式可转化为

$$\frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon(u)} \left[F'(u) \frac{\phi^n(u)}{u^n} - \frac{g'(u)}{n} \right] du. \quad (5)$$

根据留数定义，一个函数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 点处的留数等于此函数在 $z = 0$ 处的洛朗展开中 z^{-1} 的系数（参考[1, (6.1)]）。即

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon(z)} f(z) dz = [z^{-1}] f(z)$$

其中 $[z^{-1}]f(z)$ 表示 $f(z)$ 中 z^{-1} 的系数。

由于 $g(u)$ 可展开成形式幂级数，则有 $[u^{-1}]g'(u) = 0$ ，所以有

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon(u)} g'(u) du = 0.$$

故而，(5)式可简化为

$$\frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon(u)} F'(u) \frac{\phi^n(u)}{u^n} du. \quad (6)$$

根据如下事实

$$(n-1)!u^{-n} = (n-1)!(u-u_0)^{-n} \Big|_{u_0=0} = \frac{d^{n-1}}{du_0^{n-1}} \left(\frac{1}{u-u_0} \right),$$

(6)式变换为

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0} &= \frac{d^{n-1}}{du_0^{n-1}} \Big|_{u_0=0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon(u)} F'(u) \frac{\phi^n(u)}{u-u_0} du \\ &= \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} F'(u) \phi^n(u) \Big|_{u=0}, \end{aligned}$$

上式根据留数定理得到。将上式带入

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} F(u(x)) \Big|_{x=0} \text{ 可得定理中第一个等式。}$$

同理，可得定理中第二个等式。

证毕

3 Lagrange 展开公式在组合数学中的应用

Lagrange展开定理作为分析学中经典公式之一，在复分析理论、组合数学、Hopf代数理论以及特殊函数论等诸多数学分支中具有相应的形式与深刻应用，本文将从组合数学的角度来介绍它的应用^[2]。

首先，抽取定理1中等式两边 x^n 的系数，可直接得到下面的推论。

推论1 由方程 $x = u / \phi(u)$ 确定的隐函数 $u = u(x)$ ，对任一个解析函数 $F(u)$ 有如下两个关系式成立：

$$[x^n]F(u) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \{F'(u)\phi^n(u)\} \Big|_{u=0} = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \{F'(u)\phi^n(u)\}, \quad (7)$$

$$[x^n] \frac{F(u)}{1-u\phi'(u)/\phi(u)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{du^n} \{F(u)\phi^n(u)\} \Big|_{u=0} = [u^n] \{F(u)\phi^n(u)\}. \quad (8)$$

接下来以两个例子来展示它的应用。

例1 (Abel公式) 假设 $\{x, u\}$ 为两个未知量，它们满足关系式 $x = ue^{-\beta u}$ 。 $\alpha, \beta, \gamma \in C$ ，则有下面两个等式成立

$$\frac{\alpha + \gamma}{\alpha \gamma} \frac{(\alpha + \gamma + \beta n)^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha + \beta k)^{k-1}}{k!} \frac{\{\gamma + \beta(n-k)\}^{n-k-1}}{(n-k)!};$$

$$\frac{(\alpha + \gamma + \beta n)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha}{\alpha + \beta k} \frac{(\alpha + \beta k)^k}{k!} \frac{\{\gamma + \beta(n-k)\}^{n-k}}{(n-k)!}.$$

注: 当 $\beta=0$ 时, 题中两个等式退化成二项式定理。

证明 先证明第一个等式。

令, $x = ue^{-\beta u}$, $F(u) = e^{\alpha u}$, 其中 $\phi(u) = e^{\beta u}$, 则显然 $\phi(0) \neq 0$ 。

由推论1中的(7)式可得

$$[x^n]F(u) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \{ \alpha e^{(\alpha+\beta)u} \} = \alpha \frac{(\alpha+\beta)^{n-1}}{n!}. \quad (9)$$

已知 $e^{\alpha u} \cdot e^{\gamma u} = e^{(\alpha+\gamma)u}$, 抽取两端 x^n 的系数得

$$\sum_{k=0}^n [x^k] e^{\alpha u} [x^{n-k}] e^{\gamma u} = [x^n] e^{(\alpha+\gamma)u}.$$

根据(9)式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha}{\alpha+\beta k} \frac{(\alpha+\beta k)^k}{k!} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+\beta(n-k)} \frac{[\gamma+\beta(n-k)]^{n-k}}{(n-k)!} \\ = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma+\beta n} \frac{(\alpha+\gamma+\beta n)^n}{n!} \end{aligned}$$

整理可得到第一个等式。

再证明第二个等式。取 $F(u) = e^{\gamma u}$, $\phi(u) = e^{\beta u}$, 则由推论1中的(8)式可得

$$[x^n] \frac{F(u)}{1-u\phi'(u)/\phi(u)} = [x^n] \frac{e^{\gamma u}}{1-u\beta} = [u^n] e^{(\gamma-n\beta)u} = \frac{(\gamma-n\beta)^n}{n!}. \quad (10)$$

已知 $e^{\alpha u} \frac{e^{\gamma u}}{1-u\beta} = \frac{e^{(\alpha+\gamma)u}}{1-u\beta}$, 抽取其两端 x^n 的系数, 可得

$$\sum_{k=0}^n [x^k] e^{\alpha u} [x^{n-k}] \frac{e^{\gamma u}}{1-\beta u} = [x^n] \frac{e^{(\alpha+\gamma)u}}{1-\beta u}.$$

根据(9)、(10)两式可得

$$\sum_{k=0}^n \frac{(\alpha+\beta k)^{k-1}}{k!} \frac{(\gamma-n\beta+k\beta)^{n-k-1}}{(n-k)!} = \frac{(\alpha+\gamma-n\beta)^n}{n!}.$$

第二个公式得证。

4 结论

Lagrange 展开公式是分析学的经典公式之一, 对任何满足其条件的解析函数都可以得到显式的无穷级数展开式, 它弥补了隐函数定理的缺陷, 并且有广泛的应用。在这里作者仅仅给出了两个例子来介绍它的使用方法, 有兴趣的读者可以找到更多Lagrange展开公式在组合数学中的应用。

参考文献

- [1] 华东师范大学数学科学学院编著, 数学分析, 高等教育出版社[M], 第五版, 2019年.
- [2] 钟玉泉, 复变函数论, 高等教育出版社[M], 第四版, 2013年.
- [3] 于林, 广义Lagrange型和Cauchy型Taylor公式[J]. 高师理科学刊, 2023, 43(09): 1-3.