

A formula of obtaining the number of polynomial expansion combined terms based on the "Yanghui triangle"

Xiao Liang^{1*}, Yan Chen², Dezhen Si³

¹ Beijing Academy, Beijing 100000, China

² 6409 Factory, Liaoning Fushun 110000, China

³ Tsinghua University, Beijing 100000, China

Abstract: The history of ancient Chinese mathematics once had its own brilliant chapter, and the discovery of Yanghui Triangle is a very wonderful page. The Yanghui Triangle was discovered by the ancient Chinese mathematician Jia Xian in the 11th century and quoted by the mathematician Yang Hui in his book of the Southern Song Dynasty, so that we can understand Jia Xian's great contribution to mathematics today. "Yanghui Triangle" has always been a very interesting part of middle school mathematics learning. Through training students' understanding of "Yanghui Triangle", students can have stronger thinking ability of combination of number and form. This paper breaks away from the traditional research content of the coefficients of "Yanghui triangle", innovatively studies the relationship between Yanghui triangle and polynomial expansions, and proposes a method to quickly determine the final number of polynomial expansions under different powers.

Keywords: Yanghui triangle; Polynomial; Number of terms

基于“杨辉三角形”得到 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并项数公式

梁潇¹, 陈彦², 司得臻³

¹ 北京中学, 中国·北京 100018

² 辽宁省抚顺市6409工厂, 中国·辽宁抚顺 110000

³ 清华大学, 中国·北京 100018

摘要: 中国古代数学史曾经有自己光辉灿烂的篇章,而杨辉三角的发现就是十分精彩的一页。杨辉三角是中国古代数学家贾宪在公元11世纪发现,并被南宋数学家杨辉在他的书中所引述,才使我们今天得以了解贾宪在数学上的重大贡献。“杨辉三角形”一直是中学数学学习中十分有趣的部分,通过培养学生对“杨辉三角形”的理解,让学生具备更强的数形结合的思考能力。本篇文章摆脱传统的“杨辉三角形”各项系数的研究内容,创新地将杨辉三角形与多项式展开式合并最终项数的关系进行研究,并提出了一种快速确定不同幂次下的多项式展开式合并最终项数的方法。

关键词: 杨辉三角形; 多项式; 项数

1 引言

杨辉三角形从提出开始,就被巧妙地运用于数学学科的各个方面,尤其在数列、二项式定理、排列组合等。^[1]在所有的数学内容中,以杨辉三角与二项式系数的关系应用最为广泛。当然,对于“杨辉三角形”的探索还远远没有停止,笔者在此前的文章中曾

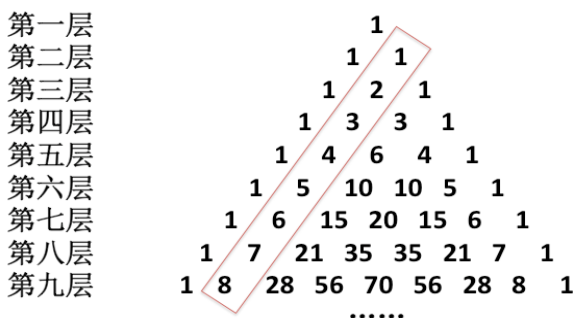
经证明了基于“杨辉三角形”推导 $(a+b+c)^n$ 展开式各项系数的方法,大大降低了运算难度和繁琐程度。^[2-4]在这篇文章中,我们将变化讨论角度,希望通过对于“杨辉三角形”性质的研究,得到它与 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后项数的关系。

2 “杨辉三角形”推导 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后项数方法举例

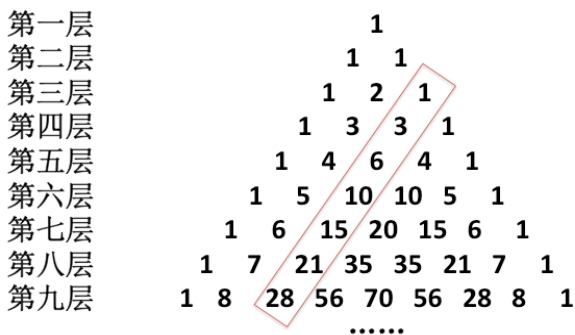
关于用“杨辉三角形”推导 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合

【通讯作者简介】梁潇(1990—),女,达斡尔族,辽宁抚顺人,硕士,研究方向:数学应用、数学建模。

并后项数的方法，我们令 $k=2$ ， n 分别等于 $0,1,2,3,4$ ，则将 n 为不同值时的式子展开并合并，很容易得到 $M_{2,0}=1$ ， $M_{2,1}=2$ ， $M_{2,2}=3$ ， $M_{2,3}=4$ 。进一步，我们观察杨辉三角形，并发现红框所在范围的数字序列恰好能够满足 $(a+b)^n$ 的项数排列，而红框所在范围的通项公式为 $C_{n+1}^1 = C_{n+(2-1)}^{(2-1)}$ 。其中 n 次展开式的项数即为在杨辉三角形中 $n+1$ 行从左向右第 2 个数。



接下来，我们令 $k=3$ ， n 分别等于 $0,1,2,3,4$ ，则将 n 为不同值时的式子展开并合并，很容易得到 $M_{3,0}=1$ ， $M_{3,1}=3$ ， $M_{3,2}=6$ ， $M_{3,3}=10$ 。进一步，我们观察杨辉三角形，并发现红框所在范围的数字序列恰好能够满足 $(a+b+c)^n$ 的项数排列，而红框所在范围的通项公式为 $C_{n+2}^2 = C_{n+(3-1)}^{(3-1)}$ 。其中 n 次展开式的项数即为在杨辉三角形中 $n+2$ 行从左向右第 3 个数。

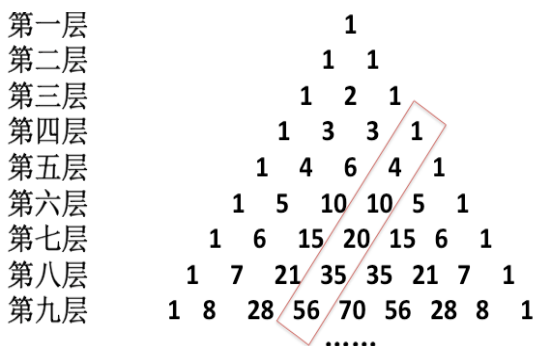


我们令 $k=4$ ， n 分别等于 $0,1,2,3,4$ 。首先我们假设 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后的项数为 $M_{(k,n)}$ ，则我们可以得到 $(a+b+c+d)^0=1$ ，则这时 $M_{4,0}=1$ ，即项数为 1，又我们可以得到 $(a+b+c+d)^1=a+b+c+d$ ，则此时 $M_{4,1}=4$ ，又我们可以得到：

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

则此时 $M_{4,2}=10$ 。另外，在下图杨辉三角形中，我们发现红框所在范围的数字序列恰好能够满足 $(a+b+c+d)^n$ 的项数排列，而红框所在范围的通项公式为 $C_{n+3}^3 = C_{n+(4-1)}^{(4-1)}$ ，其中 n 次展开式的项数即为在杨辉三

角形中 $n+3$ 行从左向右第 4 个数。



3 “杨辉三角形”推导 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后项数方法步骤整理

该方法的主要步骤可以概括为以下两步：

首先，确认展开式中的 n 与 k 的值；

其次，画出杨辉三角形，并在杨辉三角形中找出第 $n+(k-1)$ 行中的第 k 个数则该数即为 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后的项数 $M_{(k,n)}$ 。

4 “杨辉三角形”推导 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后项数方法的证明

我们首先，我们推导 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式的项数，将展开式 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 合并后，每一项的除系数以的部分可以表示为 $a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_k^{t_k}$ ，且 $\sum_{m=1}^k t_m = n$ ， $t_m \in \mathbb{N}$ ，则 $\sum_{m=1}^k t_m = n$ 展开式的项数问题就转化成了 $\sum_{m=1}^k t_m = n$ ， $t_m \in \mathbb{N}$ 的一个多元一次方程的非负整数解集的个数问题。可以得到该方程非负整数解集的个数就等于原式展开合并项数 $M_{(k,n)}$ 。

关于多元一次方程的非负整数解集个数的问题，我们可以思考一个组合问题，即共有 n 个相同的球以及 $k-1$ 个隔板，将这 $k-1$ 个隔板放在这 n 个球当中，将这 n 个球分成 k 份，则球和隔板一共有 $n+(k-1)$ 个位置，并且需要在这 $n+(k-1)$ 个位置中找到 $k-1$ 个隔板的位置，则找法共有 $C_{n+(k-1)}^{(k-1)}$ 种，则该数就是上述多元一次方程的非负整数解集的个数，也是原式展开合并后的项数 $M_{(k,n)}$ 。又在杨辉三角形中，第 $n+(k-1)$ 行中的第 k 个数的值为 $C_{n+(k-1)}^{(k-1)}$ ，这个值和 $M_{(k,n)}$ 的值相同。则命题得证，即杨辉三角形第 $n+(k-1)$ 行的第 k 个数即为 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开并合并后的项数。

与之前很多杨辉三角形的研究类似，这篇文章我们也将杨辉三角形与 k 项式展开合并式结合了起来，但是传统的杨辉三角形与 k 项式的研究更多关注的是

杨辉三角形与 k 项式展开式系数之间的关系，而这篇文章中，我们将视角转向了 k 项式展开合并式的项数问题上，在不用对 k 项式展开的情况下，利用杨辉三角形迅速得到 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后的项数。^[5-6] 杨辉三角形完美地将数学中的数与形结合了起来，通过对杨辉三角形性质的不断挖掘，我们可以更好地探讨数学的别样魅力。

5 数值验证

以上我们提出了一种基于“杨辉三角形”确定多项式展开式合并最终项数的方式。该章节中我们取不同的输入数值，验证该方法的正确性和鲁棒性。我们分别取 $k=5, 6, 7$ ， $n=0, 1, 2, 3, 4$ 作为输入数据进行验证。

首先，我们取我们令 $k=5$ ， n 分别等于 $0, 1, 2, 3, 4$ 。首先我们假设 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后的项数为 $M_{(k,n)}$ ，则我们可以得到 $(a+b+c+d+e)^0=1$ ，则这时 $M_{5,0}=1$ ，即项数为 1，又我们可以得到 $(a+b+c+d+e)^1=a+b+c+d+e$ ，则此时 $M_{5,1}=5$ ，又我们可以得到

$$(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+2ae+2be+2ce+2de$$

则此时 $M_{5,2}=15$ 。另外，在下图杨辉三角形中，我们发现红框所在范围的数字序列恰好能够满足 $(a+b+c+d+e)^n$ 的项数排列，而红框所在范围的通项公式为 $C_{n+4}^4 = C_{n+(5-1)}^{(5-1)}$ ，其中 n 次展开式的项数即为在杨辉三角形中 $n+4$ 行从左向右第 5 个数。

其次，我们取我们令 $k=6$ ， n 分别等于 $0, 1, 2, 3, 4$ 。首先我们假设 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后的项数为 $M_{(k,n)}$ ，则我们可以得到 $(a+b+c+d+e+f)^0=1$ ，则这时 $M_{6,0}=1$ ，即项数为 1，又我们可以得到 $(a+b+c+d+e+f)^1=a+b+c+d+e+f$ ，则此时 $M_{6,1}=6$ ，又我们可以得到

$$(a+b+c+d+e+f)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+2ae+2be+2ce+2de+2af+2bf+2cf+2df+2ef$$

则此时 $M_{6,2}=21$ 。另外，在下图杨辉三角形中，我们发现红框所在范围的数字序列恰好能够满足 $(a+b+c+d+e+f)^n$ 的项数排列，而红框所在范围的通项公式为 $C_{n+5}^5 = C_{n+(6-1)}^{(6-1)}$ ，其中 n 次展开式的项数即为在杨辉

三角形中 $n+5$ 行从左向右第 6 个数。

最后，我们取我们令 $k=7$ ， n 分别等于 $0, 1, 2, 3, 4$ 。首先我们假设 $(\sum_{i=1}^k a_i)^n$ 展开式合并后的项数为 $M_{(k,n)}$ ，则我们可以得到 $(a+b+c+d+e+f+h)^0=1$ ，则这时 $M_{7,0}=1$ ，即项数为 1，又我们可以得到

$$(a+b+c+d+e+f+h)^1=a+b+c+d+e+f+h$$

则此时 $M_{7,1}=5$ ，又我们可以得到

$$(a+b+c+d+e+f+h)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+h^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+2ae+2be+2ce+2de+2af+2bf+2cf+2df+2ef+2ah+2bh+2ch+2dh+2eh+2fh$$

则此时 $M_{7,2}=21$ 。另外，在下图杨辉三角形中，我们发现红框所在范围的数字序列恰好能够满足 $(a+b+c+d+e+f+h)^n$ 的项数排列，而红框所在范围的通项公式为 $C_{n+6}^6 = C_{n+(7-1)}^{(7-1)}$ ，其中 n 次展开式的项数即为在杨辉三角形中 $n+6$ 行从左向右第 7 个数。

6 结论

本篇文章基于“杨辉三角形”的特点，创新地将杨辉三角形与多项式展开式合并最终项数的关系进行研究，并提出了一种快速确定不同幂次下的多项式展开式合并最终项数的方法。并且对提出的方法进行了数值验证，证明了该方法的正确性与鲁棒性。通过该方法，可以快速确定不同项数和指数下的展开式合并后的项数。

参考文献

- [1] 王先东. 杨辉三角中的奇数与偶数 [J]. 数学通报, 2009, (5): 15-19.
- [2] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.
- [3] 吴振奎. 世界数学名题欣赏——斐波那契数列 [M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1987. 199-220.
- [4] 齐原. 大学生情绪调节的现状研究 [J]. 出国与就业 (就业版). 2011(14).
- [5] 任俊, 王岱莹. 美丽教育: 教师积极情绪的培养 [J]. 中小学校长. 2014(03).
- [6] 谭余芬, 程莹. 大学生积极情绪与人际困扰的关系研究 [J]. 教育学术月刊. 2013(11).